單元 A6： 多項式及方程

特定目標：

1. 學習單變量的實係數多項式的性質。
2. 學習除法算式、餘式定理和歐幾里德算法與及它們的應用。
3. 分解有理函數爲分項分式。
4. 學習單變量的實係數多項式方程的根的性質。

內容	時間分配	教學建議
6.1 單變量的實係數多項式	5	學生應學習單變量的實係數多項式的一般式和下列各項名稱：非零多項式的次、首項係數、常數項、首一多項式、零多項式。 學生亦應學習兩多項式的等式、和、差及積。 由定義可知，對非零多項式 f(x)、 g(x) deg {f(x) g(x)} = deg f(x) + deg g(x) 和deg {f(x) + g(x)} ≤ max {deg f(x)，deg g(x)}。 應定義兩非零多項式的最高公因式 (G.C.D. 或 H.C.F.)。
6.2 有理函數	4	學生應清楚除法算式和歐幾里德算法的分別。由除法算式可證明餘式定理，因學生在中學時已學習餘式定理，固教師可給予較深的題目。歐幾里德算法是求兩多項式的最高公因式的一種方法，教師應給予學生練習一些求兩多項式的最高公因式的題目。. 應首先定義有理函數。學生可能初次接觸分項分式，教師可引用一簡單例子，如 $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ 。 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x+1}$ 稱爲分項分式。 教師應清楚說明分解真有理函數爲分項分式的法則，並舉例說明。應舉例強調及說明，若一有理函數爲假有理函數時，應先將它表爲一多項式及真有理函數的和。

內容	時間分配	教學建議
6.3 單變量的實係數多項式方程	6	學生應學習分項分式的應用。 *例*： 1. 表 $\frac{x^2-8x+9}{(x+1)(x-2)^3}$ 爲分項分式。 2. 分解 $\frac{x^4}{(x-a)(x^2+a^2)}$ 爲分項分式。 3. 計算 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)}$ 的值。 對於二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 與及它的根α、β，學生應熟悉下列關係： $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ， $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 。 對一般 n 次多項式方程， $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ 或 $\sum_{k=0}^{n}a^kx^k=0$ ， 下列定理給出係數與根的關係： 若 α_1，α_2，…，α_n 爲多項式方程 f(x) = 0 的根，則一切可能的 k 個根α_j (k = 1，2，. . .，n) 的乘積的和 S_k 等於 $(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$ ， 即是，如 $f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ 則 $S_1=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ $S_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$ $S_3=\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$

內容	時間分配	教學建議
		…… …… $S_n = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$ 。 學生應仔細學習下列性質： (i) 非零多項式的相異根的數目小於或等於多項式的次。 (ii) 若一個整數係數多項式方程的根爲有理數 $\frac{p}{q}$ ，其 p 和 q 是互素的整數，則 p 整除多項式的常數項，而 q 整除多項式的首項係數。 (iii) 多重根的條件： $x = \alpha$ 是多項式方程 $f(x) = 0$ 的多重根的充要條件是 $f(\alpha) = 0$，且 α 是方程 $f'(x) = 0$ 的根，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的導數。 以下是較爲一般的形式： 對於正整數 k，α 是方程 $f(x) = 0$ 的 $k + 1$ 重數根當且僅當 $f(\alpha) = 0$ ， 並且 α 爲 $f'(x) = 0$ 的 k 重數根。 和 α 爲方程 $f(x) = 0$ 的 k+1 重數根當且僅當 α 爲下列方程公根： $f(x) = 0$， $f'(x) = 0$， ⋮ $f^{(k)}(x) = 0$ 但 α 不是 $f^{(k+1)}(x) = 0$ 的根。 註：以共軛偶出現的複數根會在單元 A10 複數中學習。
	15	