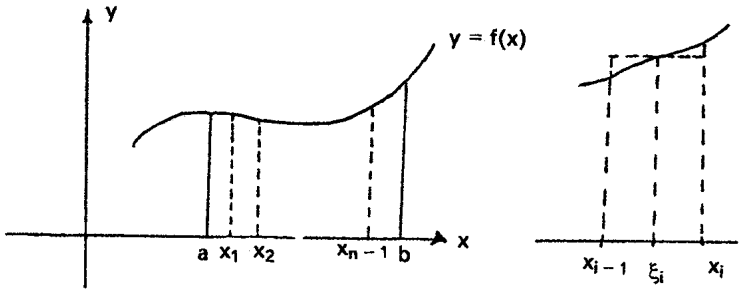
单元B5：积分法

特定目标：

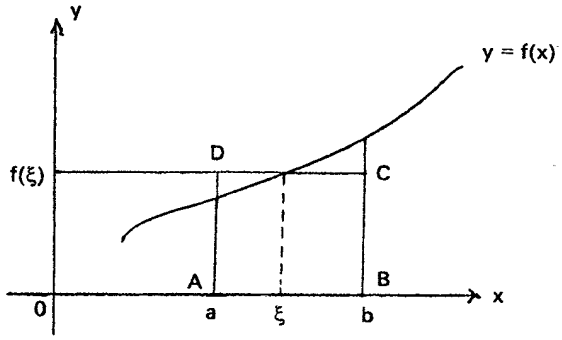
(1) 理解积分作为极限和的概念。
(2) 学习有关积分的性质。
(3) 理解积分基本定理。
(4) 运用积分基本定理于积分的求值。
(5) 学习一些求积分的方法。
(6) 掌握广义积分的基本概念。

内容	时间分配	教学建议
5.1 黎曼积分的定义	5	有关定积分的理论可由两相异的途径表达：其一为透过几何直观的进路，此外亦可采用纯分析的进路，前者需倚赖几何的面积概念，而后者则引用定积分作为一代数和的极限的概念而无需引用几何概念。教师宜按学生所需决定其取向及施教次序。以下乃一简化的说法以供参考： 在区间 [a，b] 内，设 $f(x) \geq 0$ 及其图像为有限和连续。  用点 x_0，x_1，x_2，…，x_n 将[a, b]分成 n 个子区间其中 $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$，同时设 $x_i - x_{i-1}$ 记为 Δx_i 及 ξ_i 为在$[x_{i-1}, x_i]$内任一点。由曲线 y = f(x)、直线 x = a 及 x = b

内容	时间分配	教学建议
		和 x－轴所包围的区域的面积约为总和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 。此外，当 n 增加而 $\max(\Delta x_i) \to 0$，可求此面积的值而此总和的极限则定义为 f(x) 由 x = a 到 x = b 的定积分并记为 $\int_a^b f(x)\,dx$ ，即 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max(\Delta x_i)\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 其中记号 f(x) 称为被积函数； a 称为下限； b 称为上限而此总和则称为黎曼和。 教师和学生讨论时，应强调下列各点： (1) [a，b] 是任意分割成子区间的； (2) $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$是任意的； (3) 将定积分定义为总和的极限已先假设a < b。当 a > b 其值定义为 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ 而当 a = b 时，$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (注：若定积分是利用函数F(x)作定义的，则这些结果可 视为定理；则 F(b) – F(a) = –[F(a) – F(b)] 及 F(a) – F(b) = 0 教师应示范例题并加以说明以帮助学生充分明白。以下的例题可作参考。 *例一* $\int_a^b e^x\,dx$ 若使用相等的区间 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = h$(设)，则 $x_0 = a$ ， $x_1 = a + h$， …，$x_{i-1} = a + (i-1)h$。 设 ξ_i 为 x_{i-1}，即 $\xi_i = a + (i-1)h$。 由于 $\max \Delta x_i = \Delta x_i = h$ ，

内容	时间分配	教学建议
		$\int_a^b e^x dx = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i} h = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} e^{a+(i-1)h} h = \lim_{h\to 0} he^a \sum_{i=1}^{n} e^{(i-1)h}$ $= \lim_{h\to 0} he^a \frac{(e^{nh}-1)}{(e^h-1)} = \lim_{h\to 0} he^a \frac{(e^{b-a}-1)}{(e^h-1)} = \lim_{h\to 0} h\frac{(e^b-e^a)}{(e^h-1)}$ $= (e^b-e^a)\lim_{h\to 0}\frac{h}{(e^h-1)} = (e^b-e^a)\lim_{h\to 0}\frac{1}{e^h} = e^b-e^a$ *例二* $\int_a^b x^m dx$，$m\neq -1$ 考虑n个区间其中 $x_0=a$，$x_1=ar$，…，$x_i=ar^i$，$x_n=ar^n=b$。当 $n\to\infty$，$b=ar^n$ $\Leftrightarrow r=(\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$ 因此 $r\to 1$，同时 $\max\Delta x_i=\Delta x_n=x_n-x_{n-1}=ar^n-ar^{n-1}=ar^n(1-r^{-1})=b(1-r^{-1})\to 0$。 设 $\xi_i=x_{i-1}=ar^{i-1}$ $\int_a^b x^m dx = \lim_{r\to 1}\sum_{i=1}^{n}(ar^{i-1})^m(ar^i-ar^{i-1})$ $= \lim_{r\to 1}\sum_{i=1}^{n} a^{m+1}r^{(m+1)(i-1)}(r-1)$ $= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r-1)\cdot\frac{r^{(m+1)\ n}-1}{r^{m+1}-1}$ $= \lim_{r\to 1} a^{m+1}(r^{(m+1)n-1})\cdot\frac{r-1}{r^{m+1}-1}$ $= \lim_{r\to 1}(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\frac{r-1}{r^{m+1}-1}$ $= (b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\lim_{r\to 1}\frac{1}{(m+1)r^m}$

内容	时间分配	教学建议
5.2 定积分的简单性质	4	$= \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$ 其后，教师仍须详述下列各点： (1) 若f(x)在[a，b]是连续的，则f(x)在[a，b] 为可积的； (2) 若f(x)在[a，b]是有界的和单调的，则f(x)在 [a，b]是可积的。 教师可帮助学生从定义推导下列结果： (1) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$，其中k为常数。 (2) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx$。 (3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ 而c是在区间 [a，b] 内或外任一点。 (4) 若在[a，b]，对应于所有x的值，f(x) ≥ g(x)，则 $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$。 (5) 若在[a，b]，对应于所有x的值，$\lvert f(x)\rvert \leq \phi(x)$， 则 $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leq \int_a^b \phi(x)\,dx$。 其中的特例有 (a) 若 $\phi(x)=\lvert f(x)\rvert$，则 $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$。 (b) 若 $\phi(x)=M$，而M 为常数，则 $\left\lvert\int_a^b f(x)\,dx\right\rvert \leq M(b-a)$。 可和学生讨论一些简单而直接的应用如下： (1) 若对 $x>0$，f(x) 是正的和单调递增的，试证明 $f(n-1)\leq\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n)$。

内容	时间分配	教学建议
5.3　积分中值定理	2	(2) $\left\lvert \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\sin nx}{1+x^2}dx \right\rvert \le \frac{\pi}{4n}$ 。 此定理宜以一简化的形式表达，即如： 若 f(x) 在 [a, b] 是连续的，则在 (a，b) 中存在一数 ξ，而且 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$ 从附图中可容易看出要传达的概念。学生应不难明白 f(ξ)(b−a)原来的意义就是矩形 ABCD 的面积。  如果想要一较形式化的证明，则可以用 5.2 所提及的性质和连续函数的性质，而其中特别可用介值定理。

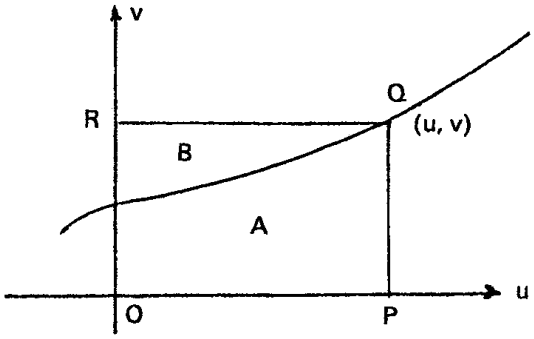
内容	时间分配	教学建议
5.4　积分基本定理及其于计算积分的应用	4	积分的第一基本定理如下： 设 f(x) 在 [a，b] 是连续的及 设 F(x) 的定义为 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ，其中 $a \le x \le b$ ， 则 (i) F(x) 在 [a，b] 是连续的 (ii) F(x) 在 (a，b) 是可微的和 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ 。 亦可以简化的形式如下 ： 若 f (x) 是连续的，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 是可微的且其导数相等于被积函数当在积分上限时的数值，即 F′(x) = f(x)。 教师应和学生详细讨论而学生可在教师指导之下引用积分的中值定理来证明此定理。 (注：教师应在教授此定理之后立即详述下列各点： (1) 若一函数 F(x)的导数与被积函数 f(x)是相等的，则 F(x)被称为 f(x)的原函数。 (2) 若同一被积函数的两个原函数为 F(x) 和 G(x)，则 F(x) − G(x) 的导数是恒等于零的，因此 F(x) − G(x)是常数。) 至于积分的第二基本定理，教师亦可以同样手法帮助学生导出。可考虑下列的方式： 设 f(x) 和 F(x)在[a，b]是连续的； 若对于 a < x < b， $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ，则对于 a < x ≤ b $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a)$ ，而其中 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

内容	时间分配	教学建议
		教师应示范一些有启发性的例题以增强学生对上述定理的全面理解。在计算定积分时一方面将其视为一无限的总和而另一方面可求有关的原函数作为另一方法。由此可以提高学生对利用微分的逆运算来计算积分的认识。 教师可先用简单的例题如 $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ 而最后用其它有趣的应用题如下： (1) 若考虑 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 [1，2]，则可以建立以下的结果 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \to \ell n\,2$ 当 $n \to \infty$， (2) 若考虑 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 (0，1)，则可以证明当 $n \to \infty$ 时，$n\sum_{r=2}^{n} \frac{1}{r^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$。
5.5 不定积分法	6	作为上述的延续，学生应将注意力集中在求原函数的机械程序作为计算定积分的另一方法。代表 f(x)的不定积分的记号 $\int f(x)\,dx$ 应介绍如下： 若 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ 成立，则称F(x)为f(x)的不定积分，且记为 $F(x) = \int f(x)\,dx$ 。 教师亦应指出 f(x)的不定积分不是唯一的及若 F(x)是 f(x)的一个不定积分，则 F(x)+c (其中 c 是一常数)是另一个，而以 $\int f(x)\,dx$ 作为 f(x)的原函数。 学生应能够运用下列公式求不定积分，事实上，教师可鼓励学生导出部分或全部公式。 (1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$，$n \neq -1$

内容	时间分配	教学建议
		(2) $\int \frac{dx}{x} = \ell n(x) + c$ (3) $\int e^x\,dx = e^x + c$ (4) $\int a^x\,dx = a^x \ell n a + c$ (5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ (6) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ (7) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$ (8) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ (9) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$ (10) $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$ (11) $\int \tan x\,dx = \ell n\lvert\sec x\rvert + c$ (12) $\int \cot x\,dx = \ell n\lvert\sin x\rvert + c$ (13) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$ (14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$

内容	时间分配	教学建议
5.6 求积分的方法 (A) 代换法	8	教师亦可提醒学生以下性质： (1) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$，其中k是一常数 (2) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ 应鼓励学生对各样的不定积分做足够的练习。因此可测试他们已掌握了基本运算，而可以顺利学习其后的技巧。 教授代换法时，对代换公式 $\int f(u)\,du = \int f[g(x)]\,g'(x)\,dx$ 无需作严谨的证明，但教师宜开始时先用简单和明显的例子如下： $\int \frac{dx}{x+1}$、$\int (x+1)^{10}\,dx$、$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$、$\int \sin^5 x\cos x\,dx$、$\int \frac{dx}{x\,\ell n\,x}$ 等。 在某些积分中，当$g'(x)$ 并不明显时，g(x)是要推测出来的，例如 $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$、$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ 等。 学生须透过大量有关的练习以发展这些技巧，以下是一些例子 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x}$ (2) $\int \frac{dx}{\cot x + \operatorname{cosec} x}$ (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ (设 $u=e^x$) (4) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ (设 $u=e^x+1$)

内容	时间分配	教学建议
		(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 其中$b>a$（设 $x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta$） (6) $\int_0^1 \frac{\ell n\,(1+x)}{1+x^2}\,dx$ (设 $x=\tan\theta$) 教师亦应和学生讨论下列有用的结果，并举实例说明： (1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ 而其中 $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ (2) 若 $f(x)=f(a-x)$，则 $\int_0^a xf(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ 而其中 $\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ (3) 若f(x) 是一周期w的周期函数，则 $\int_a^{a+w} f(x)\,dx = \int_0^w f(x)\,dx$ (4) 若f(x) 是一偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (5) 若f(x) 是一奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$ 可考虑下列有关的例题： (1) $\int_0^\pi \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\,dx$

内容	时间分配	教学建议
(B) 分部积分法	3	(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ (3) 证明 $\int_0^a x^m(a-x)^n dx=\int_0^a x^n(a-x)^m dx$ 并由此计算 $\int_0^8 x^2\sqrt[3]{8-x}\,dx$ (4) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x dx$ (5) 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ 并由此计算此积分。 (6) 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\frac{\pi}{4}$ 分部积分的公式 $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx$ 或 $\int udv=uv-\int vdu$ 可利用直观几何的方法来证明。 

内容	时间分配	教学建议
		图中提供上述公式一个非形式化的几何解释： $\int vdu$ 代表区域 A 的面积； $\int udv$ 代表区域 B 的面积； uv 代表 OPQR 的面积而由此可得出上述公式。 应用具代表性的例题作说明时可包括 $\int xe^x dx$ 、$\int x\sin x dx$ 和 $\int \ell n\, x dx$ 。 学生混合使用代换法和分部积分的公式，就可以处理很多种类的积分，例如： (1) $\int e^{ax}\cos bx\, dx$ (2) $\int \tan^{-1}x\,\ell n\,(1+x^2)\,dx$ (3) $\int (\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})\,\ell n\, x\, dx$ (4) $\int_0^1 \sin^{-1}x dx$ (5) $\int_0^1 x\tan^{-1}x\, dx$ (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x\sin x\, dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}$

内容	时间分配	教学建议
(C) 归约公式	5	归约公式是用一组函数中较简单的函数的积分来表达函数组中任一函数的积分。归约公式通常是利用分部积分的方法求得。在三角函数的积分中此法被广泛利用。可考虑下列具代表性的例题： (1) 设 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ 可记为 I_n，证明 $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$，$n \ge 2$。由此计算 I_4 的值。 (2) 设 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$，求 I_n 的归约公式，然后计算 $\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$ 的值。 (3) 若 $I_n = \int x^n e^{x^2} dx$，证明对 $n > 2$，$I_n = \frac{1}{2}x^{n-1}e^{x^2} - \frac{1}{2}(n-1)I_{n-2}$。
(D) 利用部分分数计算积分	4	有理代数函数的积分是可先将数式分解成部分分数后完成，一般有四类分式： $\int \frac{Ldx}{ax+b}$、$\int \frac{Ldx}{(ax+b)^r}$、$\int \frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)}dx$ 和 $\int \frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)^r}dx$。 学生处理前三类的分式应没有特别的困难，但若遇到最后那类分式时，则须要应用归约公式了。 以下是一些可作讨论的例题： (1) $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}\,dx$ (2) $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$ (3) 设 $I_n = \int \frac{dx}{(1-x^4)^n}$，证明当 $n \ge 1$，$4nI_{n+1} = (4n-1)I_n + \frac{x}{(1-x^4)^n}$ 并求 $\int \frac{x^8}{(1-x^4)^4}dx$ 的值。

内容	时间分配	教学建议
5.7 广义积分	4	应介绍广义积分的基本概念而学生预期可认识第一类广义积分，即 $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ 或 $2\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ 并可简单记为 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ 或 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ 及第二类广义积分，即 当 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$，$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^b f(x)\,dx$ 和 当 $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$，$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+}\int_a^{b-h} f(x)dx$ 属于第一类而具代表性的例子有： (1) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$ (2) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2}$ 教师宜提出 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ 作例题，但指明这不是一广义积分因其极限并不存在。 第二类广义积分的例题有 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 和 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$。 同样地，教师可用 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 作说明，这亦不是一广义积分因其极限亦不存在。
	45	