单元 B2：极限、连续性及可微性

特定目标：

1. 理解函数的极限的直观概念。
2. 理解函数的连续性及可微性的直观概念。
3. 认识极限作为微积分的基本概念。

内容	时间分配	教学建议
2.1 函数的极限	5	函数的极限应以直观方式介绍。其实，在 $x=a$ 时，函数 $y=f(x)$的极限概念应与序列的极限概念连系起来。当自变量经过一收敛序列$\{x_n\}$(横坐标序列)，其极限为 a 时，则可考虑其直坐标序列$\{f(x_n)\}$。故此当$\{x_n\}$趋近 a 时，则 $\{f(x_n)\}$ 趋近一有限值 ℓ 之情况，应可清楚而明确地表达，即是 若 $x \to a$ 则 $f(x) \to \ell$ 或 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ 部份教师可能会将重点放在当 x 与 a 为相当接近时，则 f(x)与 ℓ 之间的差异可以任意的小的概念上，从而强化当 $x \to a$ 时， $f(x) \to \ell$ 的理解。 但必须向学生指出，函数值 f(a) 的存在，并不能引申为极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 的存在及等于 f(a)，縱使在一般情况下可成立。教师可参考下列例子： $f(x) = \begin{cases} 1 & 當\ x \neq 0 \\ 0 & 當\ x = 0 \end{cases}$ 这裏 $f(0) = 0$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ 自变量趋近极限 a 的途径应加以注意：当 x 的值是由左至右增加时，函数的极限称为左方极限，以 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 表示；当 x 的值是由右至左递减时，极限称为右方极限，以 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 表示。 由此，教师不难引导学生理解当 $x \to a$ 时，函数 f(x)的极限存在当且仅当其左方极限和右方极限相等。至于对极限作更广泛理解，教师应讨论 $x \to \infty$ 的情况，使学生再一次明白当 x 趋于一足够大的数时，f(x)与 ℓ 的的差异可任意的小，并表为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ 。

53

内容	时间分配	教学建议
		下列函数的极限性质应包括在讨论范围内： (i) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to a}[kf(x)] = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ，k 与 x 无关 (iii) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (iv) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ ，其中 $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ (v) 若 $f(x) \le h(x) \le g(x)$ 在 x 接近 a 时成立，而且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ ，则 $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ 。 一些重要的极根，如下列者，应予以介绍： (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{a}{x})^x = e^a$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ell n\, a$ ；$a > 0$ (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(1+x)}{x} = 1$ (7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ell n\, x}{x-1} = 1$ 教师应给予学生足够的计算函数极限的练习以便强化他们在这方面的训练。

54

内容	时间分配	教学建议
2.2 函数的连续性	4	函数的连续性的定义是应以函数的极限作为基础，以及用直观的方法加以解释，不宜涉及$\varepsilon-\delta$ 的概念。教师可参考下列建议： 若 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在兼且等于 f(a)，则函数 f(a)在 x = a 连续。 若函数在某区间内的每一点连续，则函数在该区间内连续。 在引入函数于一点的不连续性前，应讨论一些常见的函数，例如： (i) $f(x)=x^2$ 在任何区间内皆连续。 (ii) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 并非在整个区间 $0\le x\le 5$ 内连续。 上述概念并不需要作严谨的处理，但教师宜提供广泛而合适的例子，以便加强学生在这方面的认识，并理解若两函数在 x = a 连续，则它们的和、差及乘积在该点亦为连续，而当分母不等于零时，它们的商亦为连续。教师应引用一些在整段实数线上皆为连续的例子，以启发学生进一步的认识： (i) 多项式函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ (ii) 指数函数 $f(x)=a^x$ ；$a>0$ (iii) 对数函数 $f(x)=\log_a x$ ；$a>0$， $a\ne 1$ (iv) 三角函数，例如 $\sin x$、$\cos x$ 对于合成函数的连续性，教师可采纳下列方式： 设 $y=f[g(x)]$ 为一合成函数，其内函数 g(x) 在 x = a 连续，其外函数 y = f(t)在 t = g(a)亦为连续，则合成函数 y = f[g(x)]在 x = a 连续。 教师可强调每一连续函数的连续函数亦为连续。 教师应指出在一区间内的连续函数拥有一系列值得注意的性质，并加以讨论，但不宜作严谨的证明。这些性质包括： (i) 若函数 f(x)在闭区间 [a，b]内连续，其中 f(a)= A 和 f(b) = B，$A\ne B$，则 f(x)在 A 与 B 之间的每一数值取值一次或以上。(介值定理) (ii) 闭区间上的连续函数必为有界。

内容	时间分配	教学建议
		(iii) 闭区间上的连续函数必有其极大和极小值。 (性质 (ii) 和 (iii) 称为魏尔斯脱拉斯定理)
2.3 函数的可微性	4	函数 f(x) 在 x = a 的可微性定义如下： 函数 f(x) 在 x = a 上可微当且仅当极限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 或 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在。 教师应同时指出若一函数在某点可微， 则函数在该点连续，而连续性祗是可微性的必要条件而并非充分条件。并且，函数在 x = a 的导数定义就是上述极限的值。学生可透过上述学习理解可微性的概念。函数 f(x) 在 x = a 的导数可表为 $f'(a)$ 、 $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right\|_{x=a}$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=a}$ 教师应提及若函数在一区间内每一点皆可微，则该函数在该区间内可微，兼且在区间内的每一 x 值，皆对应于函数在该点的导数 f'(x)，因此 f'(x)亦为 x 的函数，称为 f(x)的导函数。 在这阶段，教师应预备充足例题以便学生能掌握微分法的概念和技巧，至于从基本原理求取一些典型函数的导数，尤为重要。故此，足够的练习是不可缺少的。下列例子可作参教考： (1) 利用第一求导法则，找出下列函数于各点的导数： (i) x^2 于 x = 1 (ii) e^x 于 x = 0 (iii) sinx 于 $x=\frac{\pi}{4}$ (2) 利用第一求导法则，求下列函数的导数： (i) $f(x)=x^n$ 其中 n 为一正整数 (ii) $f(x)=e^x$
	13	